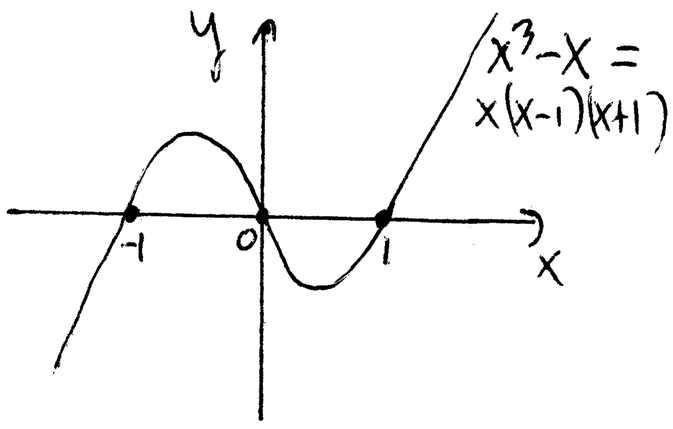
Panorama

§1: Die Gleichung 3. Grades

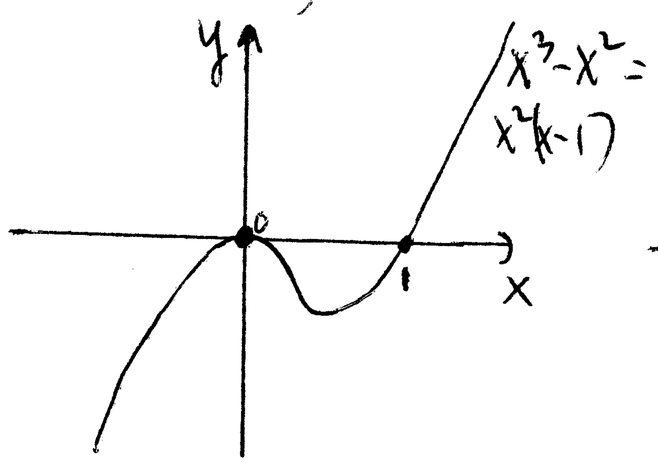
Gleichung: $ax^3+bx^2+cx+d \overset{(1)}{=} 0 \quad (a,b,c,d \in \mathbb{R},\ a \neq 0)$

Zur Erinnerung: (1) hat mindestens eine reelle Nullstelle (nach dem Zwischenwertsatz, ZWS).

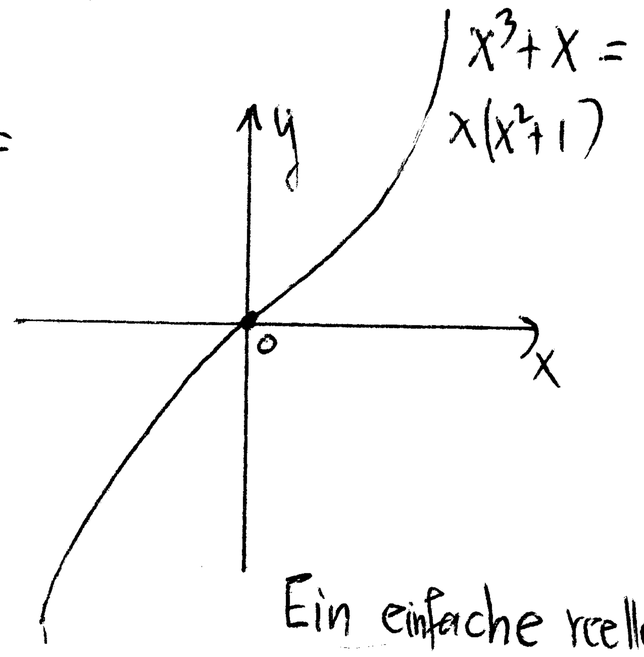
Bsple:



3 versch. reelle Nullst.



Eine doppelte reelle Nullst. und eine einfache reelle Nullst.



Ein einfache reelle Nullstelle

Ziel: $\boxed{\text{Herleitung der Cardanischen Formel zur Auflösung von (1)}}$

[Geronimo Cardano: 1501-1576]

Kubische Ergänzung

$$(1) \Leftrightarrow x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{3a}\right)^3-3x\frac{b^2}{9a^2}-\frac{b^3}{27a^3}+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{3a}\right)^3+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{3a^2}\right)x+\frac{d}{a}-\frac{b^3}{27a^3}=0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x+\frac{b}{3a}\right)^3+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{3a^2}\right)\left(x+\frac{b}{3a}\right)-\frac{b}{3a}\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{3a^2}\right)+\frac{d}{a}-\frac{b^3}{27a^3}=0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x+\frac{b}{3a}\right)^3+\underbrace{\frac{3ac-b^2}{3a^2}}_{=:p}\left(x+\frac{b}{3a}\right)+\underbrace{\frac{2b^3-9abc+27a^2d}{27a^3}}_{=:q}=0.$$

Mit $y := x + \frac{b}{3a}$ erhält man: $(1) \Leftrightarrow y^3 + py + q = 0$.

Also reicht es, Gleichungen der Form $x^3 + px + q \overset{(*)}{=} 0$ zu betrachten $[p, q \in \mathbb{R}]$.

Ab jetzt arbeiten wir in $\mathbb{C}$.

Konventionen: Sei $z = x \in \mathbb{R}$.

- Für $x > 0$ bezeichnet $\sqrt{x}$ die einzige positive Quadratwurzel aus x.
- Für $x \leq 0$ setzen wir $\sqrt{x} := \sqrt{-x}\, i$. $[\text{z.B: } \sqrt{-4} = 2i]$
- Unter $\sqrt[3]{x}$ versteht man die einzige reelle 3. Wurzel aus x.

Sei $x \in \mathbb{C}$ eine beliebige Lösung von $(*)$.

Trick Ang. $x = u + v$ mit $u, v \in \mathbb{C}$.

$$(*) \Leftrightarrow x^3 + px + q = 0 \Leftrightarrow (u+v)^3 + p(u+v) + q = 0 \Leftrightarrow$$

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + p(u+v) + q = 0 \Leftrightarrow u^3 + v^3 + 3uv(u+v) + p(u+v) + q = 0$$

$$\Leftrightarrow u^3 + v^3 + q + (3uv + p)(u+v) = 0.$$

<u>Wenn</u> $\begin{cases} u^3 + v^3 + q = 0 \\ 3uv + p = 0 \end{cases}$, dann ist $x = u + v$ eine Lösung von $(*)$.

$$\begin{cases} u^3 + v^3 + q = 0 \\ 3uv + p = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ uv = -p/3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3v^3 = -p^3/27 \\ uv \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2)$$

Wir zeigen: $\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3v^3 = -p^3/27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 = -\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \\ v^3 = -\frac{1}{2}q \mp \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \end{cases}$.

"$\Rightarrow$" $u^3v^3 = -p^3/27 \Rightarrow u^3(-q-u^3) = -p^3/27 \Rightarrow u^3(q+u^3) = p^3/27$

$\Rightarrow (u^3)^2 + q\cdot u^3 - p^3/27 = 0 \underset{\text{übliche "p-q" Formel}}{\Longrightarrow} u^3 = -\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$.

Daraus folgt $v^3 = -q-u^3 = -q-\left(-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right) = -\frac{1}{2}q \mp \sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$.

"$\Leftarrow$" $u^3+v^3 = -\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}} - \frac{1}{2}q \mp \sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}} = -\frac{1}{2}q - \frac{1}{2}q = -q$ und

$u^3v^3 \overset{\text{3. bin. Form}}{=} \left(-\frac{1}{2}q\right)^2 - \left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right) = -p^3/27$.

Sei $\Delta := q^2/4 + p^3/27$. $[\Delta \in \mathbb{R}]$

Wir haben gezeigt: $\begin{cases} u^3+v^3 = -q \\ u^3v^3 = -p^3/27 \\ uv \in \mathbb{R} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} u^3 = -\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\Delta} \\ v^3 = -\frac{1}{2}q \mp \sqrt{\Delta} \\ uv \in \mathbb{R} \end{cases}$ (3)

Also: Wenn $(u,v) \in \mathbb{C}^2$ Lösung von (3) ist, dann ist $x = u+v$ eine Lösung von (*).

Wir betrachten das System $\begin{cases} u^3 = -\frac{1}{2}q + \sqrt{\Delta} \\ v^3 = -\frac{1}{2}q - \sqrt{\Delta} \\ uv \in \mathbb{R} \end{cases}$ (4). [Beachte: (4) $\Rightarrow$ (3)]

Wir zeigen, dass (4) drei Lösungen $(u_1,v_1), (u_2,v_2), (u_3,v_3)$ in $\mathbb{C}^2$ besitzt, die zu den Lösungen x_1, x_2, x_3 von (*) führen.

<u>Fall 1:</u> $\Delta = q^2/4 + p^3/27 \geq 0$.

Seien $u_1 := \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\Delta}}$ und $v_1 := \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt{\Delta}}$. $\left[-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\Delta} \in \mathbb{R} \overset{\text{laut unseren Konventionen}}{\Longrightarrow} u_1, v_1 \in \mathbb{R}\right]$

Es gilt trivialerweise $u_1^3 = -\frac{1}{2}q + \sqrt{\Delta}$, $v_1^3 = -\frac{1}{2}q - \sqrt{\Delta}$, $u_1, v_1 \in \mathbb{R}$.

Also ist $x_1 = u_1 + v_1 = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt{\Delta}}$ Lösung von (*).

Seien $(u_2, v_2) := (u_1 e^{i2\pi/3}, v_1 e^{i4\pi/3})$ und $(u_3, v_3) := (u_1 e^{i4\pi/3}, v_1 e^{i2\pi/3})$. (4)

(u_2, v_2) und (u_3, v_3) sind Lösungen von (4) denn für $i = 2, 3$ gelten

$u_i^3 = u_1^3 = -\frac{1}{2}q + \sqrt{\Delta}$; $v_i^3 = v_1^3 = -\frac{1}{2}q - \sqrt{\Delta}$; $u_i v_i = u_1 v_1 \in \mathbb{R}$.

Also sind $x_2 = u_2 + v_2 = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\Delta}}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\Delta}}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ und

$x_3 = u_3 + v_3 = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\Delta}}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\Delta}}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ Lösungen von (*).

Explizit haben wir

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\Delta}}$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\Delta}}\right) + i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\Delta}} - \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\Delta}}\right)$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\Delta}}\right) - i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\Delta}} - \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\Delta}}\right).$$

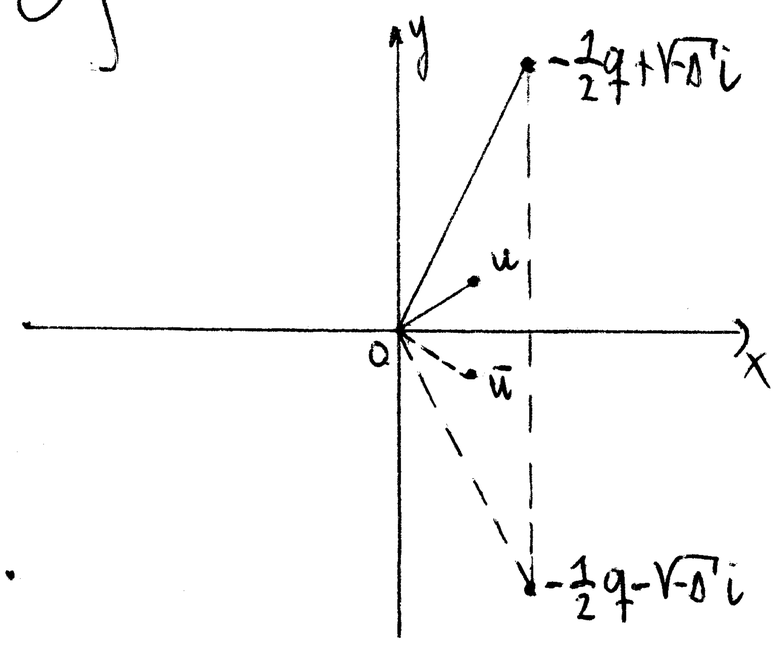
Aus diesen Formeln für x_1, x_2, x_3 lässt es sich leicht zeigen:

- Wenn $\Delta > 0$ ist, dann sind x_1, x_2, x_3 paarweise verschieden und $x_1 \in \mathbb{R}$ und $x_3 = \overline{x_2} \notin \mathbb{R}$.
- Wenn $\Delta = 0$ und $q \neq 0$, dann ist x_1 eine einfache reelle Lösung von (*) und $x_2 = x_3$ eine doppelte reelle Lösung von (*).
- Wenn $\Delta = 0$ und $q = 0$, dann ist $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ die einzige Lösung von (*). [(*) ist die Gleichung $x^3 = 0$]

<u>Fall 2:</u> $\Delta = q^2/4 + p^3/27 < 0$.

Sei $u \in \mathbb{C}$ mit $u^3 = -\frac{1}{2}q + \sqrt{\Delta} \overset{\text{laut unseren Konventionen}}{=} -\frac{1}{2}q + \sqrt{-\Delta}\, i$.

Sei $v := \overline{u}$. $v^3 = \overline{u}^3 = \overline{u} \cdot \overline{u} \cdot \overline{u} = \overline{u^3} = -\frac{1}{2}q - \sqrt{-\Delta}\, i = -\frac{1}{2}q - \sqrt{\Delta}$.



$uv = u\bar{u} = |u|^2 \in \mathbb{R}$. Also ist $(u, \bar{u})$ Lösung von (4) und $x = u + \bar{u}$ ist eine (reelle) Lösung von (*).

Seien $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{C}$ die 3 verschiedene 3. Wurzeln aus $-\frac{1}{2}q + \sqrt{\Delta}$.
Dann sind $x_1 := u_1 + \bar{u}_1$, $x_2 := u_2 + \bar{u}_2$, $x_3 := u_3 + \bar{u}_3$ reelle Lösungen von (*).
Man kann zeigen (s. Üb), dass x_1, x_2, x_3 paarweise verschieden sind.

<u>Satz 1:</u>

1) Seien $p, q \in \mathbb{R}$ und $\Delta := q^2/4 + p^3/27$.
Die Gleichung $x^3 + px + q \overset{(*)}{=} 0$ hat die 3 Lösungen $x = u + v$,
wobei i) u ist eine beliebige 3. Wurzel aus $-\frac{1}{2}q + \sqrt{\Delta}$
ii) v ist <u>die</u> 3. Wurzel aus $-\frac{1}{2}q - \sqrt{\Delta}$ mit $uv \in \mathbb{R}$.
Genauer gesagt:

- Falls $\Delta \geq 0$, dann lauten die 3 Lösungen von (*)

$$x_1 = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\Delta}}$$

$$x_2 = -\tfrac{1}{2}\left(\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\Delta}}\right) + i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\Delta}} - \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\Delta}}\right)$$

$$x_3 = \overline{x_2}.$$

- Falls $\Delta < 0$, dann sind die 3 verschiedene reellen Lösungen von (*) der Form $x = u + \bar{u}$ mit $u^3 = -\frac{1}{2}q + \sqrt{\Delta}$.

2) Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$; $p := \dfrac{3ac - b^2}{3a^2}$, $q := \dfrac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3}$.
Die Lösungen von $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ sind der Form
$x = y - b/3a$, mit y Lösung von $y^3 + py + q = 0$. $\square$

Beispiele:

1) $x^3-6x-6=0$ $\qquad \Delta = q^2/4 + p^3/27 = (-6)^2/4 + (-6)^3/27 = 9-8 = 1 > 0.$

Die 3 Lösungen von $x^3-6x-6=0$ sind

$$x_1 = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\Delta}} = \sqrt[3]{3+\sqrt{1}} + \sqrt[3]{3-\sqrt{1}} = \sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}$$

$$x_2 = -\tfrac{1}{2}\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}\right) + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}\right)$$

$$x_3 = \overline{x_2} = -\tfrac{1}{2}\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}\right) - i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}\right).$$

2) $x^3+3x^2+9x+9=0$ $\qquad p = \dfrac{3ac-b^2}{3a^2} = \dfrac{3\cdot 9-9}{3} = 6$ und

$$q = \frac{2b^3-9abc+27a^2d}{27a^3} = \frac{2\cdot 27-9\cdot 3\cdot 9+27\cdot 9}{27} = 2.$$

Die Substitution $x = y - b/3a = y-1$ führt zu $y^3+6y+2 \overset{(1)}{=} 0.$
Man rechnet die Lösungen von (1) wie im Beispiel 1). Die Lösungen sind $y_1 = \sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}$ und $y_{2,3} = -\tfrac{1}{2}\left(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}\right) \pm i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right).$
Die Lösungen von $x^3+3x^2+9x+9=0$ sind $x_1 = y_1-1$, $x_2 = y_2-1$, $x_3 = y_3-1$.

3) $x^3+x-2=0$ $\qquad \Delta = q^2/4 + p^3/27 = 1 + 1/27 = 28/27 > 0.$

Also ist $x_1 = \sqrt[3]{1+\sqrt{28/27}} + \sqrt[3]{1-\sqrt{28/27}}$ eine Lösung von $x^3+x-2=0.$
Da x_1 die einzige reelle Lösung von $x^3+x-2=0$ ist, muss $x_1 = 1$ sein $[1^3+1-2=0]$. Um x_2, x_3 zu bestimmen sollte man am besten x^3+x-2 faktorisieren. $x^3+x-2 = (x-1)(x^2+x+2)$. $x^2+x+2=0 \underset{p\text{-}q\text{ Form}}{\Longrightarrow} x_{2,3} = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}-2}$
$= \tfrac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{7}i\right)$. Also $x_1 = 1$, $x_{2,3} = \tfrac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{7}i\right)$.